**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математическая логика

Mathematical Logic

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 003620

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина «Математическая логика» входит в перечень обязательных дисциплин, формирующих основную подготовку бакалавра в области математических наук. Она представляет собой комплекс знаний умений и навыков, позволяющих овладеть математическими методами; развить у обучающихся навыки решения математических задач.   
 Целью дисциплины является обучение методам математической логики; развитие у обучающихся доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических дисциплин.  
 Основной задачей курса является изучение основных разделов математической логики; развитие навыков самостоятельного решения задач; обеспечение базы для усвоения формализованных спецификаций, алгоритмических методов и их компьютерных реализаций.  
 Отдельные параметры односеместрового курса могут варьироваться по степени сложности в зависимости от начальной подготовки обучающихся.   
 Основным методологическим принципом построения программы курса, равно как и всей концепции обучения в целом, является принцип поэтапного системного накопления знаний и формирования необходимых компетенций по модели: от простого и/или знакомого — к сложному и/или незнакомому, а основной методологической стратегией прохождения отдельных разделов программы является ступенчатость и цикличность, предусматривающие постепенный возврат к ранее усвоенному материалу на более высоком концептуальном уровне.  
 Главный принцип, который лежит в основе данной программы, — это следование концепции Европейского уровня работы с формализацией математических формулировок и тем образовательным стандартам, которые обозначены этим документом в рамках приобретения компетенций, которые включают практические и теоретические компоненты.  
 По окончании обучения обучающиеся должны знать содержание дисциплины «Математическая логика» и иметь достаточно полное представление о возможностях применения ее разделов в различных прикладных областях науки и техники; уметь формализовывать условия и утверждения средствами математической логики и теории алгоритмов, строить выводы секвенций.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Максимальная эффективность обучения будет достигнута при условии владения обучающимися базовых математических понятий для формулировки и формализации математических утверждений. Поэтому программа дисциплины рассчитана на обучающихся второго года обучения.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Общепрофессиональные компетенции | ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности | 1. Знать содержание дисциплины "Математическая логика" и иметь достаточно полное представление о возможностях применения ее разделов в различных прикладных областях науки и техники. 2. Уметь применять основы математической логики для решения разнообразных математических задач. 3. Уметь формализовывать условия и утверждения средствами математической логики и теории алгоритмов, строить выводы секвенций. 4. Быть способным приобретать новые знания, используя современные образовательные технологии. 5. Иметь способность к анализу информации и адаптации к новым парадигмам. 6. Иметь исследовательские навыки. 7. Иметь сформированную компетенцию: | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения |

По окончании обучения студент должен:  
Дисциплина участвует в формировании компетенций обучающихся по образовательной программе, установленных учебным планом для данной дисциплины:

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Практические занятия – 10 ак. ч.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |  | |  | |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 4 | 30 |  | 2 | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 38 | |  | 21 |  | 10 | | 3 | |
|  | 2-25 |  | 2-25 | 2-25 |  |  |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 | |  | 1-1 |  |  | |  | |
| ИТОГО | 30 |  | 2 | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 38 | |  | 21 |  |  | | 3 | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 4 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): **Семестр 4**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| 1 | Введение. Место и роль математической логики в историко-научном развитии. | лекции | 2 |
| практические занятия | 0 |
| по методическим материалам | 4 |
| 2 | Исчисление высказываний.  Понятие пропозициональной формулы. Равнозначность пропозициональных формул. Выразимость булевых функций через пропозициональную формулу. Секвенция и ее логическая и числовая интерпретация. Секвенциальное исчисление высказываний. Семантическое обоснование, непротиворечивость и полнота исчисления. | лекции | 6 |
| практические занятия | 4 |
| по методическим материалам | 6 |
| 3 | Исчисление предикатов.  Понятие терма. Атомарная формула. Формула исчисления предикатов. Секвенция и ее логическая интерпретация. Секвенциальное исчисление предикатов. Формализация математических и других утверждений в языке исчисления предикатов. Построение выводов и семантических интерпретаций. | лекции | 6 |
| практические занятия | 4 |
| по методическим материалам | 8 |
| 4 | Аксиоматические теории.  Исчисление предикатов с равенством (аксиомы равенства и согласованности с равенством). Аксиоматические теории (группы, упорядоченные множества). Формальная арифметика. Аксиомы элементарной теории чисел (формальной арифметики). Первая теорема Геделя о неполноте арифметики. Вторая теорема Геделя о непротиворечивости арифметики. Парадокс Рассела. Аксиоматическая теория множеств. Теоретико-множественные гипотезы. | лекции | 8 |
| практические занятия | 2 |
| по методическим материалам | 8 |
| 5 | Элементы теории алгоритмов.  Данные для алгоритмов. Программы на языке Паскаль как алгоритмы.  Простейшие теоремы о невозможности алгоритмов. Понятие массовой проблемы. Алгоритмическая неразрешимость простейших массовых проблем: проблема применимости, непродолжимость универсального алгоритма до всюду применимого.  Различные варианты точного понятия алгоритма: нормальный алгоритм, машина Тьюринга, недетерминированная машина Тьюринга, альтернирующая машина Тьюринга, примитивно рекурсивные функции.  Неразрешимость проблемы равенства слов в алфавите. Неразрешимость проблемы тавтологичности в исчислении предикатов.  Перечислимые и разрешимые множества. Операции над перечислимыми множествами | лекции | 5 |
| практические занятия | 3 |
| по методическим материалам | 6 |
| 6 | Элементы теории сложности алгоритмов.  Определение иерархии по времени и памяти детерминированных, недетерминированных и альтернирующих машин Тьюринга. Определение и примеры NP-полных и PSPACE-полных задач. | лекции | 3 |
| практические занятия | 2 |
| по методическим материалам | 6 |
|  | Всего |  | 30 ак.ч. - лекции,  15 ак. ч. - практические занятия,  38 ак. ч. - сам.работа по метод материалам |

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины состоит в разборе основных понятий, принципов и типичных задач по темам курса и решения практических заданий с использованием компьютера. Методические материалы включают в себя следующие типы материалов — учебники, учебные пособия, методические указания для обучающихся, Интернет-ресурсы, электронные учебные пособия, с опорой на которые проводится аудиторная работа.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающегося, как вид деятельности, стимулирующий активность, самостоятельность, познавательный интерес с целью поиска необходимой информации, приобретения знаний, использования этих знаний для решения учебных, научных и профессиональных задач, представляет собой важную составляющую учебного процесса, которой отводится не менее половины учебного времени при очной форме обучения. Время, отводимое на самостоятельную работу, должно использоваться обучающимися для наиболее полного освоения учебной дисциплины. Следовательно, организация эффективной внеаудиторной самостоятельной работы в процессе обучения требует, с одной стороны, создание условий, призванных обеспечить рациональное и планомерное управление учебной деятельностью, протекающей в отсутствие преподавателя, и тщательной подготовки целого ряда учебных пособий, снабженных методическими указаниями, с другой стороны.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Промежуточная аттестация проводится в виде экзамена в традиционной устной форме.

Экзаменационный билет содержит один вопрос, посвящённый важному понятию математической логики и аксиоматических теорий.

1. К экзамену допускается обучающийся, решивший все задачи контрольной работы и набравший не менее 35 баллов при условии, что каждая задача решена не менее, чем на половину, то есть за неё начисленоне менее половины возможных баллов. В противном случае выставляется оценка F --- «неудовлетворительно».

Критерии начисления баллов за контрольную работу:

– первая задача – до 10 баллов;

– вторая задача – до 10 баллов;

– третья задача при условии решения обоих пунктов – до 10 баллов;

– четвертая задача – до 10 баллов (поровну за каждый пункт).

2. Непосредственно на экзамене предварительно экзаменующийся должен ответить на вопросы по основным понятиям логики, теории моделей, аксиоматических теорий. Предлагается три вопроса, каждый из которых оценивается в 11 баллов. Баллы снижаются за неточности в ответе. При наборе менее 15 баллов ответ считается неудовлетворительным (оценка F). Максимальное количество баллов за ответ --- 33.

3 После этого следует ответ на вопрос с определения основных понятий и теорем рассматриваемого билета. За верные определения и формулировки основных терем рассматриваемой темы начисляется максимально 35 баллов. При наборе менее 15 баллов выставляется оценка «неудовлетворительно» (F).

3. Доказательство основных теорем билета --- 17 баллов.

4. Дополнительные баллы – до 6 баллов.

Критерии оценок

«Отлично» – A --- выше 85 баллов.

«Хорошо» – B --- 81 – 84 балла;

– C – 71 – 80 баллов.

«Удовлетворительно» – D – 61 – 70 баллов;

– E – 50 – 60 баллов.

Обучающийся, набравший строго менее 50 баллов, получает оценку F --- «неудовлетворительно».

Замечание. Оценка «неудовлетворительно» (F) может быть выставлена по итогам ответа на билет на этапе 1, 2 или 3.

Демонстрация непонимания следующих понятий и обозначений как в ходе предварительного опроса, так и в ходе ответа на билет, включая решение задач, влечет оценку «неудовлетворительно»:

Список вопросов, на которые должен быть дан правильный ответ. Если ответ не даётся, то независимо от набранных баллов обучающийся получает оценку «незачтено»:

1. Определение пропозициональной формулы.

2. Валентность пропозициональной формулы.

3. Теоремы о выражении пропозициональной формулы через три логические связки, через две логические связки.

4. Теоремы о приведении пропозициональной формулы к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам, совершенным нормальным формам.

5. Определение формулы исчисления предикатов.

6. Определение свободных и связанных переменных.

7. Определение свободы для подстановки терма в формулу исчисления предикатов.

8. Определение секвенции.

9. Определение вывода.

10. Определение и минимальный список правил вывода.

11. Выводимость формул.

12. Теории в языке исчисления предикатов: определение, противоречивость и непротиворечивость.

13. Элементарная аксиоматическая теория чисел (перечень аксиом).

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список вопросов по курсу.

1. Алфавит, слово, формальный язык. Дерево разбора. Примеры.

2. Язык высказываний. Синтаксис и классическая семантика. Выполнимые формулы и тавтологии.

3. Представление булевой функции формулой. СКНФ/СДНФ. Теоремы о СКНФ/СДНФ.

4. Логическое следование. Теорема о логическом следовании. Логические законы.

5. Теории в языке высказываний, виды теорий. Модели теорий. Примеры.

6. Исчисление. Общее понятие вывода. Пример исчисления палиндромов.

7. Классическое гильбертовское исчисление высказываний (из аксиом достаточно привести пять). Вывод из гипотез.

8. Обобщенная теорема о корректности. Обобщенная теорема о дедукции. (Для высказываний)

9. Лемма Линденбаума для счетного языка высказываний. Теорема о существовании модели.

10. Теорема о полноте. Теорема компактности. (Для высказываний)

11. Поиск контрпримера к формуле. Секвенциальное исчисление высказываний.

12. Частичный порядок. Порядки на формулах. Диаграмма Хассе. Булева алгебра (из аксиом достаточно привести три). Алгебра Линденбаума.

13. Язык предикатов первого порядка с равенством. Сигнатура. Синтаксис. Подстановки термов вместо переменных.

14. Классическая семантика первого порядка. Индексы де Брауна. Конгруэнтные формулы.

15. Классическое гильбертовское исчисление предикатов первого порядка (новые аксиомы). Вывод из гипотез.

16. Обобщенная теорема о корректности. Обобщенная теорема о дедукции. (Для предикатов)

17. Теорема о полноте (формулировка). Теорема компактности. Применения. (Для предикатов)

18. Поиск контрпримера к формуле. Секвенциальное исчисление предикатов.

19. Формальные аксиоматические теории: группы, кольца, поля.

20. Формальные аксиоматические теории: арифметики Пресбургера, Пеано, полная теория натуральных чисел.

21. Первая и вторая теоремы Геделя о неполноте.

22. Отношение полного порядка. Формулировка теоремы Цермело. Ординалы. Кардиналы.

Континуум-гипотеза.

23. Трансфинитная индукция/рекурсия. Примеры.

24. Парадоксы теории множеств. Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля (несколько аксиом). Аксиома выбора.

25. Лямбда-исчисление. Термы и формулы. Альфа и бета преобразования.

26. Нумералы Чёрча. Лямбда-исчисление как модель вычислимости.

27. SKI-исчисление. Термы и формулы.

28. Простые типы. Типизированное SKI исчисление.

Замечание. Список вопросов может варьироваться. Некоторые вопросы могут быть исключены, возможно добавление новых, изменение формулировки.

Темы задач для контрольной работы по исчислению высказываний и предикатов:

1. Приведение пропозициональных формул к нормальным формам.

2. Проверка логического следствия для пропозициональных выводов.

3. Построение вывода секвенции или предъявление контрпримера в случае невыводимости. Предлагается две-три секвенции, одна из которых заведомо выводима, а одна нет.

4. Формализация в некотором языке исчисления предикатов алгебраических, геометрических и общеязыковых понятий и фактов (3 задачи).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 1 | ОПК-1.1 Уметь идентифицировать возможные проблемы и пути их решения | Каждая из практических задач, каждый ответ на вопросы билета и каждый ответ на дополнительный вопрос оцениваются по шкале от 0 (нет ответа/не сделано) до 10 (очень хорошо), затем баллы усредняются. Результат переводится в диапазон от 0 до 100. |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К преподаванию дисциплины могут быть допущены преподаватели, имеющие диплом о высшем образовании по соответствующему направлению.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Специальных требований нет

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ. MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Специальных требований нет.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Специальных требований нет.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Требуется мел примерно 3 – 4 стандартных куска на 2 часа лекций и практических занятий, тряпки для вытирания досок – не менее трёх на 2 часа занятий.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список литературы**

1. Косовская Т.М. Обучение формализации и проверке правильности рассуждений средствами исчисления высказываний и предикатов: учебное пособие. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2013. – 128 с. **Мм – 117 экз.**

2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2004. — 256 с. **Мм – 10 экз. + ЭБС «Лань» по подписке СПбГУ:** [**https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/2242#book\_name**](https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/2242#book_name)

3. Клини С. Математическая логика. – М.: Наука, 1973-2005. - 391 с. **Мм – 16 экз.**

4. Косовский Н.К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980-1981. - 192 с. **Мм – 159 экз.**

5. Косовский Н.К., Тишков А.В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств. – СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 2000. - 268 с. **Мм – 21 экз.**

6. Косовский Н.К. Основы теории элементарных алгоритмов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. - 152 с. **Мм - 98 экз.**

7. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции — 2-е изд. — М.: Наука, 1965-1986. — 368 с. **Мм – 16 экз.**

8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М., Мир, 1982. - 416 с. **Мм – 14 экз.**

**3.4.2 Перечень иных информационных источников**

Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/>

Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: <http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS>

Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/>

Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource%20type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Ловягин Юрий Никитич, кандидат физико-математических нак, доцент кафедры информатики, +7 905 255 02 94